Муниципальный этап

I. Решите задачи

№1. На какое наибольшее количество различных прямоугольников можно разрезать шахматную доску (8×8)?

№2. Для всех действительных x и y и некоторой функции $f(t)$ выполняется равенство $f(x^2+y) = f(x) + f(y^2)$. Чему равно $f(-1)$?

№3. Существует ли такое натуральное n, что $n^2 = \ldots 2303 \ldots$ (слева и справа может быть любое количество любых цифр)?

№4. В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Внутри трапеции нашлась такая точка M, что $\angle ABM = \angle DCM = 90°$. Найдите угол MAB, если $\angle ADC = 50°$.

№5. Найдите количество общих точек графиков функций

$f(x) = x^3 + 6x$ и $g(x) = 12x^2 + 1$

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 – №8) могут содержаться математические ошибки (как в условиях "задач", так и в "ответах" и "решениях"). Если некорректно условие "задачи", то объясните, почему это так. Если неверно только "решение", то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\dfrac{24}{25}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна 12.

Решение.

Пусть наша пирамида $SABCD$, проведем высоту BH в треугольнике ABS. Поскольку пирамида правильная, то треугольники ABS и ADS равны, откуда DH - также высота.

Заметим, что по условию $\sin BHD = \dfrac{24}{25}$, откуда $\cos BHD = \dfrac{7}{25}$. Пусть высота $BH = DH$ равна a, тогда по теореме косинусов получаем, что $BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH \cdot DH \cdot \cos\angle BHD$

$BD^2 = \dfrac{36a^2}{25}$ откуда $BD = \dfrac{6a}{5}$, тогда $AB = BC = CD = AD = \dfrac{6a}{5\sqrt{2}}$, посчитаем по теореме Пифагора для треугольника ABH длину стороны $AH^2 = AB^2 - BH^2 = \dfrac{36a^2}{50} - a^2 = \dfrac{-7a^2}{25}$, чего не может быть, значит, такой пирамиды из условия задачи не может существовать.

Ответ: условие задачи некорректно и решения у задачи нет.

№7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} |x+2y+1| \le 11, \\ (x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2+a. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что первое неравенство эквивалентно неравенству $-12 \le x + 2y \le 10$, которое задает на плоскости полосу, границы которой - пара параллельных прямых $x + 2y = 10$ и $x + 2y = -12$.

Второе уравнение задает окружность с центром $(a, 2a)$ и радиусом $\sqrt{2+a}$. Для того, чтобы система имела единственное решение, окружность должна касаться одной из прямых, являющейся границей нашей полосы. Для этого расстояние от центра окружности до прямой должно равняться радиусу окружности. Воспользуемся формулой расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$: $r = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Касание с верхней границей полосы:
$\sqrt{2+a} = \dfrac{|a+4a-10|}{\sqrt{5}}$. Решениями такого уравнения являются $a = \dfrac{6}{5}$ и $a = 3$.
Касание с нижней границей полосы:
$\sqrt{2+a} = \dfrac{|a+4a+12|}{\sqrt{5}}$. Решений у такого уравнения нет.
Ответ: $a = \dfrac{6}{5}$ и $a = 3$
№8.
Решите уравнение $2^{(x-1)^2}\log_3(x^2-2x+3) = 2^{x+1}\log_3(x+3)$
Решение.
Рассмотрим функцию $f(t) = 2^t\log_3(t+2)$: она является монотонно возрастающей функцией, так как она произведение двух монотонно возрастающих функций, значит, каждое свое значение она принимает по одному разу. Так как наше уравнение эквивалентно уравнению
$f((x-1)^2) = f(x+1)$, то получаем, что
$(x-1)^2 = x+1$
Решаем уравнение и получаем, что $x = 0$ или $x = 3$.
Ответ: $x = 0$ и $x = 3$.

Решения задач